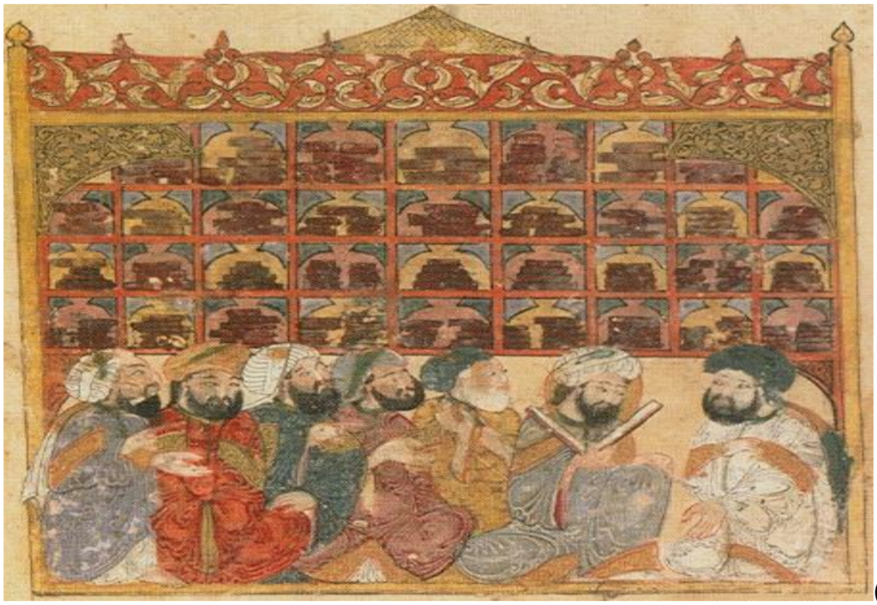
אלף ושמונה מאות שנים מאוחר יותר....

לאורך הדרך:

שושלת אבאסיד (הארון אל-ראשיד) , בגדד:


הספריה בבגדד (בית החוכמה)

א) תרגום אוקלידס לערבית (800 לספירה)

ב) הכנסת האלגברה (800 לספירה) על ידי

Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī

The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing

השלמה, או חיסור משני צידי משוואה =al-jabr

תרגום ללטינית:

*Liber algebrae et almucabala* by Robert of Chester (Spain, 1145)

תרגום אוקלידס מערבית ללטינית: 1120 לספירה (נזיר אנגלי)

## <u>המאה ה-17—לידתו של המדע המודרני</u>

GALILEI----------------1564-1642

KEPLER---------------1571-1630

DESCARTES--------1596-1650

FERMAT--------------1601-1665

PASCAL---------------1623-1662

NEWTON--------------1642-1727

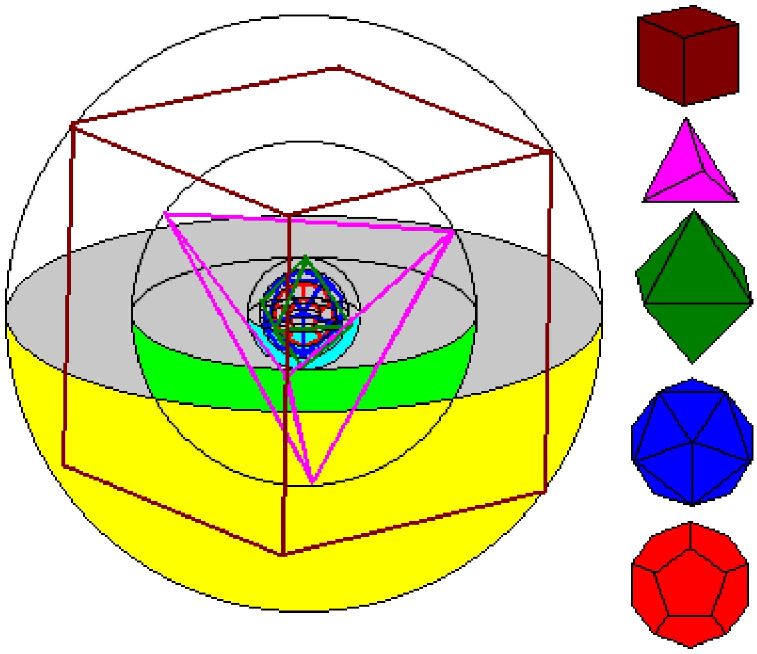
LEIBNIZ----------------1646-1716

## KEPLER: *Mysterium Cosmographicum* (1596)

The earth is the sphere, the measure of all; round it describe a dodecahedron; the sphere including this will be Mars. Round Mars describe a tetrahedron; the sphere including this will be Jupiter. Describe a cube round Jupiter; the sphere including this will be Saturn. Now, inscribe in the earth an icosahedron, the sphere inscribed in it will be Venus: inscribe an octahedron in Venus: the circle inscribed in it will be Mercury.

## KEPLER : *Harmonices Mundi* (1618)

**Geometry, coeternal with God and shining in the divine Mind, gave God the pattern... by which he laid out the world so that it might be best and most beautiful and finally most like the Creator.**



מערכת השמש על פי קפלר

## **René Descartes—1596-1650**

**ספרו המונומנטלי ("על  המתודה")**

*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences (1637)*

**הדגיש את חשיבות המתודה המתימטית הנמצאת ביסוד החשיבה האנושית (לא רק המדעית).**

**ספר הגיאומטריה הוא אחד משלושה נספחים לספר המתודה (השניים האחרים עוסקים באופטיקה ומטאורולוגיה).**

**הציטוט המפורסם שלו:**

*Cogito Ergo Sum*

אני חושב—משמע אני קיים.

**כמה ציטוטים נוספים:**

**1) Only the mathematicians have been able to arrive at any proofs, that is, certain and evident reasons (disc.2)**

**2) It is not enough to have a good mind. The main thing is to use it well (disc. 5).**

**3) Perfect numbers like perfect men are very rare...**

# The Geometry of René Descartes

## BOOK I

### Problems the Construction of Which Requires Only Straight Lines and Circles

ANY problem in geometry can easily be reduced to such terms that a knowledge of the lengths of certain straight lines is sufficient for its construction.[1] Just as arithmetic consists of only four or five operations, namely, addition, subtraction, multiplication, division and the extraction of roots, which may be considered a kind of division, so in geometry, to find required lines it is merely necessary to add or subtract other lines; or else, taking one line which I shall call unity in order to relate it as closely as possible to numbers,[2] and which can in general be chosen arbitrarily, and having given two other lines, to find a fourth line which shall be to one of the given lines as the other is to unity (which is the same as multiplication); or, again, to find a fourth line which is to one of the given lines as unity is to the other (which is equivalent to division); or, finally, to find one, two, or several mean proportionals between unity and some other line (which is the same

[1] Large collections of problems of this nature are contained in the following works: Vincenzo Riccati and Girolamo Saladino, *Institutiones Analyticae,* Bologna, 1765; Maria Gaetana Agnesi, *Istituzioni Analitiche,* Milan, 1748; Claude Rabuel, *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes,* Lyons, 1730 (hereafter referred to as Rabuel); and other books of the same period or earlier.

[2] Van Schooten, in his Latin edition of 1683, has this note: "Per unitatem intellige lineam quandam determinatam, qua ad quamvis reliquarum linearum talem relationem habeat, qualem unitas ad certum aliquem numerum." *Geometria a Renato Des Cartes, una cum notis Florimondi de Beaune, opera atque studio Francisci à Schooten,* Amsterdam, 1683, p. 165 (hereafter referred to as Van Schooten).

In general, the translation runs page for page with the facing original. On account of figures and footnotes, however, this plan is occasionally varied, but not in such a way as to cause the reader any serious inconvenience.

# LA GEOMETRIE.

## LIVRE PREMIER.

### *Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.*

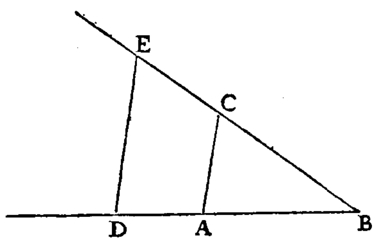
TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité est

Commēt le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, on cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

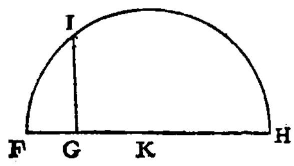



Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.




Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Commēt on peut

Mais ſouuent on n'a pas beſoin de tracer ainſi ces ligne as extracting the square root, cube root, etc., of the given line.[3] And I shall not hesitate to introduce these arithmetical terms into geometry, for the sake of greater clearness.

For example, let AB be taken as unity, and let it be required to multiply BD by BC. I have only to join the points A and C, and draw DE parallel to CA; then BE is the product of BD and BC.

If it be required to divide BE by BD, I join E and D, and draw AC parallel to DE; then BC is the result of the division.

If the square root of GH is desired, I add, along the same straight line, FG equal to unity; then, bisecting FH at K, I describe the circle FIH about K as a center, and draw from G a perpendicular and extend it to I, and GI is the required root. I do not speak here of cube root, or other roots, since I shall speak more conveniently of them later.

Often it is not necessary thus to draw the lines on paper, but it is sufficient to designate each by a single letter. Thus, to add the lines BD and GH, I call one $a$ and the other $b$, and write $a+b$. Then $a-b$ will indicate that $b$ is subtracted from $a$; $ab$ that $a$ is multiplied by $b$; $\frac{a}{b}$ that $a$ is divided by $b$; $aa$ or $a^2$ that $a$ is multiplied by itself; $a^3$ that this result is multiplied by $a$, and so on, indefinitely.[4] Again, if I wish to extract the square root of $a^2+b^2$, I write $\sqrt{a^2+b^2}$; if I wish to extract the cube root of $a^3-b^3+ab^2$, I write $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$, and similarly for other roots.[5] Here it must be observed that by $a^2$, $b^3$, and similar expressions, I ordinarily mean only simple lines, which, however, I name squares, cubes, etc., so that I may make use of the terms employed in algebra.[6]

[3] While in arithmetic the only exact roots obtainable are those of perfect powers, in geometry a length can be found which will represent exactly the square root of a given line, even though this line be not commensurable with unity. Of other roots, Descartes speaks later.

[4] Descartes uses $a^3$, $a^4$, $a^5$, $a^6$, and so on, to represent the respective powers of $a$, but he uses both $aa$ and $a^2$ without distinction. For example, he often has $aabb$, but he also uses $\frac{3a^2}{4b^2}$.

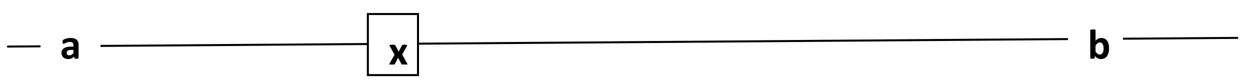
[5] Descartes writes: $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$. See original, page 299, line 9.

[6] At the time this was written, $a^2$ was commonly considered to mean the surface of a square whose side is $a$, and $b^3$ to mean the volume of a cube whose side is $b$; while $b^4$, $b^5$, ... were unintelligible as geometric forms. Descartes here says that $a^2$ does not have this meaning, but means the line obtained by constructing a third proportional to 1 and $a$, and so on.

# מערכת הקואורדינטות הקרטזית

## ציר המספרים

מתאר את כל המספרים הממשיים, חיוביים ושליליים.




הנקודה **x** נמצאת בשליש המרחק בין **a, b.**

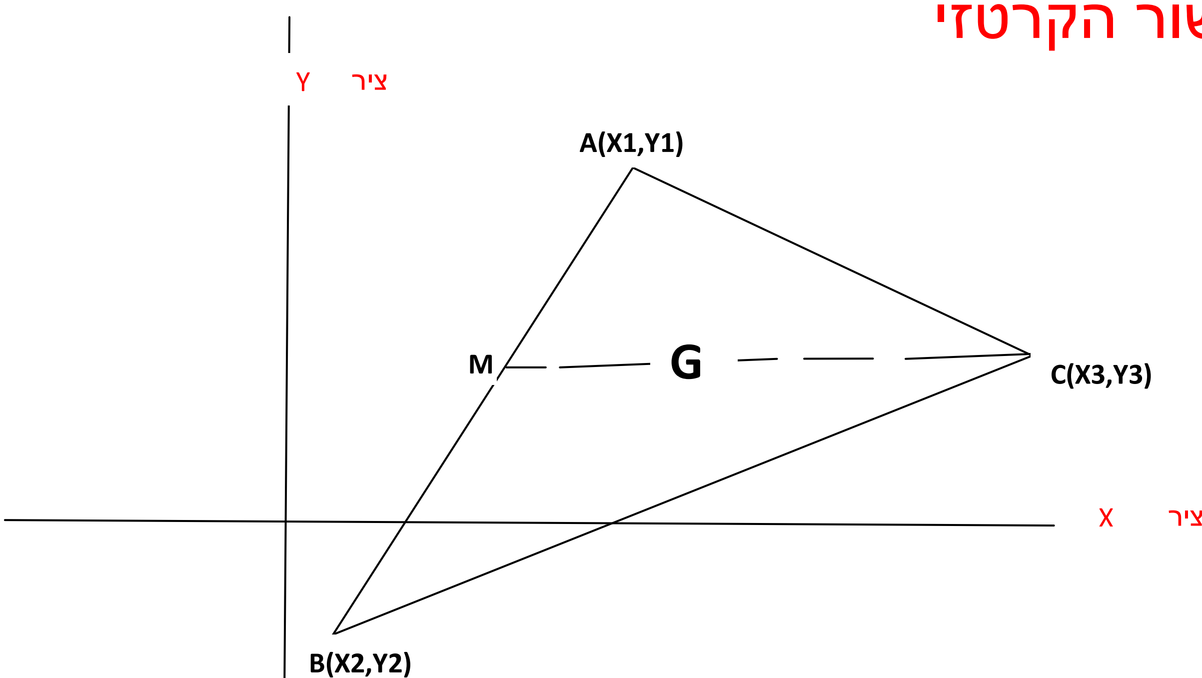
כיצד נבטא אותה בנוסחה על ציר המספרים?

$$\boxed{x = a + \tfrac{1}{3}(b-a) = a - \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}b = \underline{\tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{3}b}}$$

אבחנה: ה"משקל" הניתן לנקודה השמאלית גדול פי שניים מהמשקל הניתן לנקודה הימנית.

חוק המנוף: מכפלת המרחק במשקל היא קבועה.

# המישור הקרטזי




הנקודה M נמצאת באמצע בין A, B

ולכן $M=\left(\frac{1}{2}(X1+X2),\ \frac{1}{2}(Y1+Y2)\right)$

הקו המחבר את M, C הוא התיכון לצלע AB.

הנקודה G נמצאת על התיכון, בשליש המרחק מ- M

לכן קואורדינטות X,Y שלה הן:

**$X(G)=2/3\ X(M)+1/3\ X3=\underline{1/3\ (X1+X2+X3)}$, $Y(G)=2/3\ Y(M)+1/3\ X3=\underline{1/3\ (Y1+Y2+Y3)}$**

שיקול <u>סימטריה</u> מביא למשפט הבא:

<u>משפט</u>: שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה G.

# מכפלה קרטזית של קבוצות

A, B, שתי קבוצות של עצמים. אזי ***<u>המכפלה הקרטזית</u>*** שלהן, המסומנת

$$A \times B$$

**היא אוסף הזוגות הסדורים**

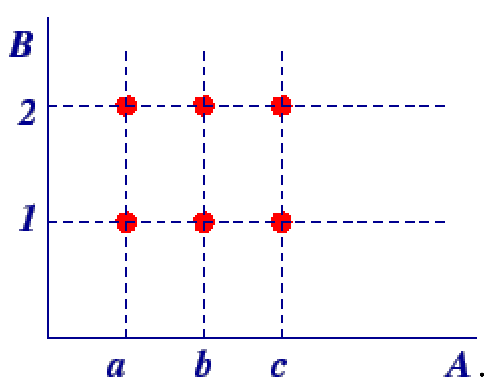
$$A \times B = \{(a,b), \quad a \in A, b \in B\}$$

סימן שייכות =∈

**לדוגמה**

$A = \{a, b, c\}$ , $B = \{1, 2\}$

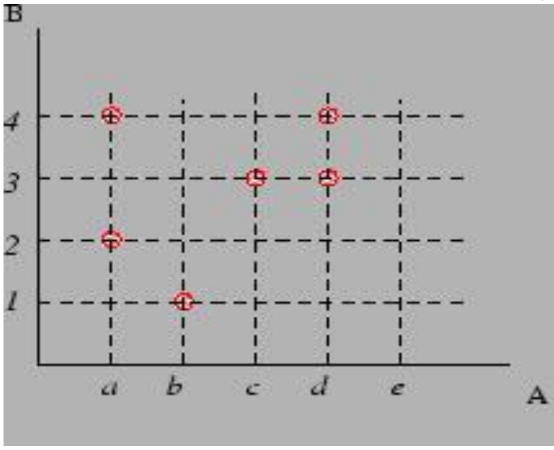
$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}.$

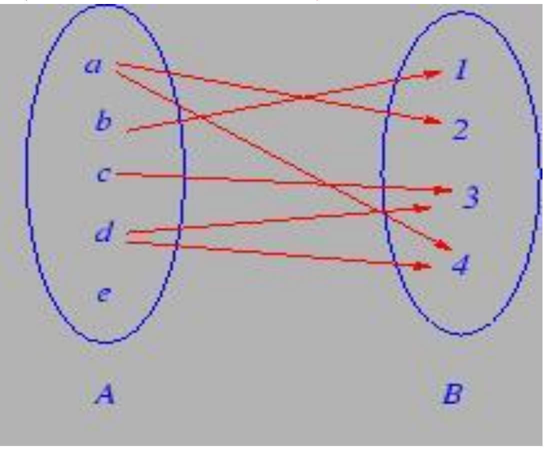



**המישור הקרטזי=ציר המספרים מכפלה קרטזית עם עצמו**

$$R^2 = R \times R$$

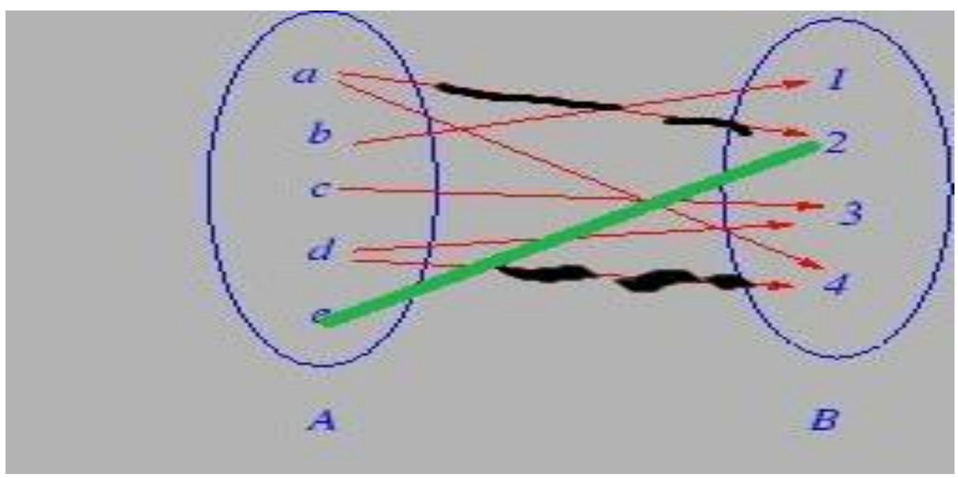
**יחס על מכפלה קרטזית** הוא קבוצה חלקית של המכפלה




**פונקציה** מהקבוצה **A** לקבוצה **B**

היא יחס שבו כל איבר של **A** מופיע בדיוק פעם אחת .



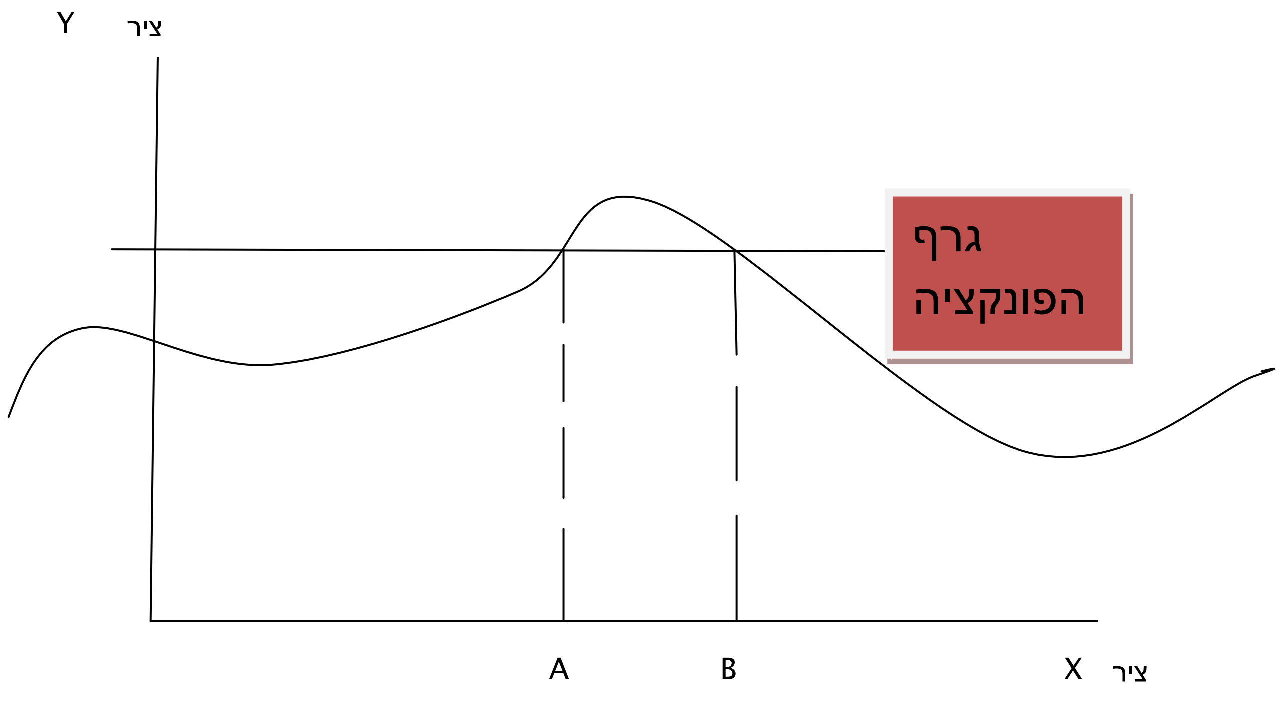

$$a \to 4, b \to 1, c \to 3, d \to 3, e \to 2$$

## דוגמה ליחס על המישור הקרטזי $R^2 = R \times R$

$$PYTH = \left\{(a,b) \in R \times R, \quad a,b \text{ שלמים}, \quad \exists c \text{ שלם}, \quad a^2 + b^2 = c^2 \right\}$$

סימן שפירושו "קיים" $= \exists$

## דוגמה לפונקציה על המישור הקרטזי $R^2 = R \times R$




**נשים לב: ערך הפונקציה ב- A שווה ל ערך הפונקציה ב- B**

**אבל לכל נקודה על ציר X מיוחס רק ערך אחד על ציר Y**

# משוואת הקו הישר במישור הקרטזי

אנו רוצים "לתרגם" את התכונה הגיאומטרית של הקו הישר לפונקציה במישור הקרטזי.

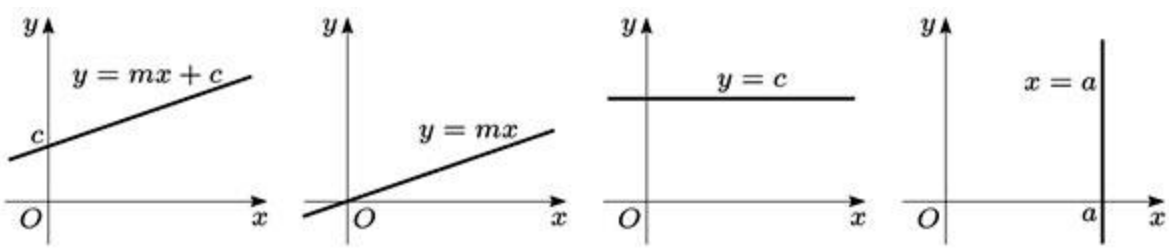
$$Y=mX+c$$

כאשר

$m$ הוא **שיפוע הקו**,

**במלים אחרות: כאשר X גדל ביחידה אחת אזי Y גדל ב-m יחידות (הסבר נוסף להלן).**

**(0,c) היא נקודת החיתוך עם ציר Y .**




**נשים לב : שלושת הגראפים השמאליים מתארים פונקציות,**

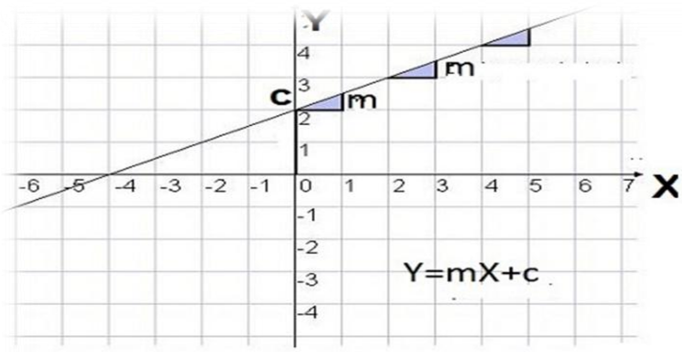
**אך השוויון x=a מתאר יחס שאינו פונקציה.**

**מסקנה: הקווים Y=mX+c , Y=pX+q הם מקבילים**

**אם ורק אם m=p.**

**המסקנה מבטאת תנאי הכרחי ומספיק לכך ששני קווים ישרים יהיו מקבילים.**

# הסבר מפורט למושג השיפוע




כאשר X מתקדם

ביחידה אחת

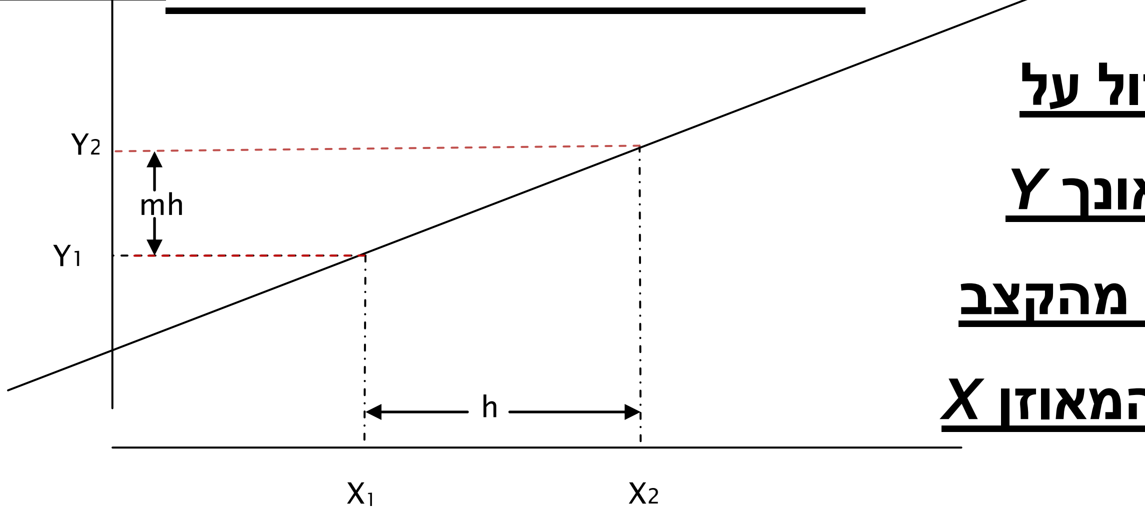
Y מתקדם ב- m

יחידות

**וכאשר X מתקדם ב—h יחידות אזי שני ערכי Y הם:**

$$Y_1 = mX_1 + c \quad Y_2 = mX_2 + c$$

$$Y_2 - Y_1 = m(X_2 - X_1) = mh$$




**קצב הגידול על**

**הציר המאונך *Y***

**הוא פי *m* מהקצב**

**על הציר המאוזן *X***